鋼軌輪廓方程式

關鍵詞：鋼軌斷面、四連桿曲柄滑塊機構、鋼軌輪廓方程式

財團法人中華顧問工程司／軌道技術中心／工程師／錢明鴻 ❶
國立台灣科技大學／機械工程系／副教授／吳翼貽 ❷
交通部鐵路改建工程局／副總工程司／廖崑亮 ❸
財團法人中華顧問工程司／軌道技術中心／主任／成維華 ❹

摘 要 ABSTRACT

目前世界各國鋼軌標準皆採用鋼軌斷面圖說方式呈現，但此方式無法應用於電腦模擬分析，並精確計算輪軌接觸狀態。本文提出一種機構分析法，用於剖析及計算鋼軌斷面各特徵點之數值，並提供精確鋼軌輪廓方程式。此機構分析法基於G1 連續曲線之特性及標準鋼軌重要參數之限制，應用於解析中華民國國家標準(Chinese National Standards, CNS) CNS 3268 E1008、14827 E1061及14828 E1062三種鋼軌標準斷面。經由機構分析及最佳化，鋼軌斷面特徵點具有小數點後6位數之高精確度，可使鋼軌尺寸結果更加合理。且為提昇鋼軌輪廓方程式之通用性，應用成熟及標準化之G Code方程式描述鋼軌輪廓，使此方程式便於製造，以利後續國內輪軌互制行為之模擬及鋼軌受力分佈之研究及鋼軌檢核之標準。

壹、前言

軌道交通運輸系統憑藉著優異的能源消耗及低環境污染等特性，儼然成為新世紀之交通運輸解決方案。儘管軌道系統具備許多優點，但仍存在許多問題，而輪軌接觸則成為許多研究學者所探討的重點之一。鋼軌為軌道系統中解決車輛動力及振動噪音關鍵因素；採用正確之鋼軌及車輪配對可確實改善輪軌接觸之行為，但也涉及到軌道車輛運行之安全性（爬軌、脫軌或斷軌）、經濟性（輪軌磨耗及接觸疲勞）和環境（振動與噪音）控制之問題。

台灣於民國48年起制定軌道工程E類國家標準，並建立常用鋼軌標準及類型，以利國內軌道工程之發展。目前各國常用之鋼軌標準可分為：國際鐵路聯盟（International Union of Railways, UIC)、歐盟標準（European Standard, EN)、日本工業標準（Japan Industrial Standard, JIS)、美國鐵路工程及路線養護協會（American Railway Engineering and Maintenance-of-Way Association, AREMA)、澳洲國家標準（Australia Standards, AS)、印度國家標準(Indian Standard, IS)等各種鋼軌標準。

臺灣地區的鐵路系統，可分為一般鐵路、大眾捷運及高速鐵路等項目，鐵路總營運公里數1561.1公里。雖國內鐵路系統完整且遍及全島，但使用之鋼軌標準截然迥異，一般鐵路、捷運及高速鐵路分別採用JIS50N、UIC60及JIS60之不同鋼軌標準，且受限於國內市場需求，自行開發及生產鋼軌較為困難；加上設置於直線路段之鋼軌，若於正常使用情況下，其磨耗量非常微小。因而導致國內鋼軌使用量不足、製造產能不易擴增等情況，多數鋼軌皆仰賴國外進口，使得鋼軌斷面輪廓之檢核尤其重要。

鋼軌輪廓是求解輪軌接觸應力之前提，且與車輛運行安全性、動力學特性及鋼軌本身之壽命皆有密切關係，鋼軌斷面輪廓是否精確將直接影響輪軌接觸應力之準確度。一般鋼軌設計初期皆採用經驗法則，拼湊出符合設計原則之鋼軌外型，設計中皆無相對應之參考依據，通常採用事後校對方法，以驗證鋼軌斷面設計是否適用。例如日本新幹線車輪圓錐踏面，採用世界上最大的圓弧半徑R600mm，但後來發現新幹線的車輪踏面磨耗增大，並從1974年起進行實驗至今，期望研究出新型之鋼軌斷面。因此，本文透過機構分析法解析國內CNS標準鋼軌。研究在重要鋼軌設計參數限制下，其鋼軌輪廓特徵點之數值，且期望提供精確鋼軌輪廓方程式，以利後續輪軌互制行為之模擬及鋼軌受力分佈之研究，並找出最佳車輪及鋼軌外型配對模式，提昇軌道車輛乘坐舒適度及降低鋼軌維修成本。

貳、鋼軌斷面輪廓設計重點

一、鋼軌功用

為確保兩鋼軌之間距，用以承受車輛的車輪負載，並將承受的負載傳給軌枕；同時為車輪的滾動提供連續、平順的表面和引導車輪運行，適度的鋼軌踏面寬度可增加輪軌接觸面積、緩和踏面應力及減少鋼軌磨耗。依鋼軌斷面可分為軌頭、軌腹及軌底三部份，如圖1所示。

二、鋼軌設計需求

目前各國常用之鋼軌皆以工字型平底鋼軌最為普遍。鋼軌斷面設計必須使鋼軌具有足夠的強度、韌性、抗彎能力、軌頭的抗壓和耐磨能力、軌底的支承面積以及抗傾倒能力等強度和穩定性。此外，尚須考慮經濟合理性和輥軋(Rolling)技術可行性等因素；倘若鋼軌發生斷裂和破損，將危及行車安全。因此鋼軌斷面必須符合下列功能要求：

(一) 以最少的斷面積承受垂直及水平方向之壓力。

(二) 頭部不易磨耗且具有充分之磨耗餘裕度，以延長使用年限。

(三) 易於固定且形狀安定不易傾倒。

三、鋼軌各部份設計重點

(一) 軌頭部份

軌頭寬度、踏面寬度及軌頭高度為主要參數。

1. 軌頭頂面內側與車輪直接接觸而受磨耗量較大，故須增大其與車輪之接觸面積以加強耐磨性。
2. 踏面則為了減小接觸壓力採用磨耗性斷面，根據鋼軌磨耗形狀的調查結果以及世界上鋼軌設計發展方向採用三個圓弧組成軌頭踏面曲線，且為配合鋼軌傾斜角，於鋼軌頂部採用較大半徑，使車輪踏面儘量接觸鋼軌頂面中央部份；CNS 3268 E1008 50N鋼軌標準之踏面採用300mm、80mm及13mm

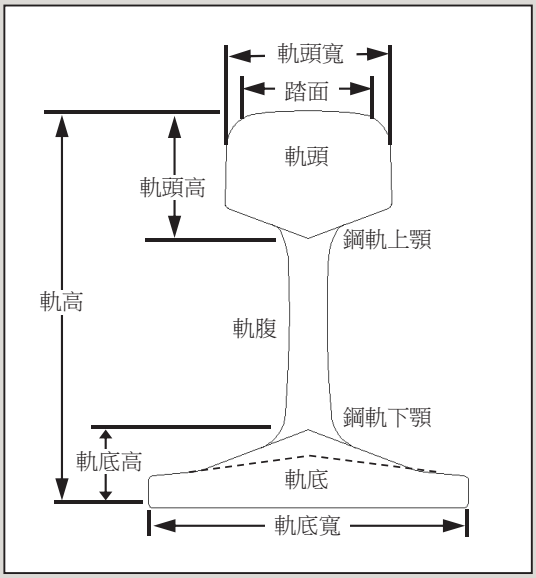

圖1 工字型鋼軌斷面

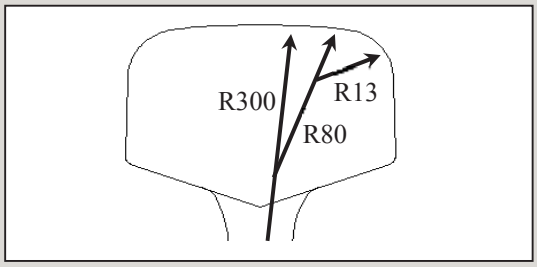

圖2 CNS 3268 E1008 50N鋼軌踏面圓弧組合

圖3 軌頭斷面圖

三種圓弧所組成，如圖2所示。

3. 最後可藉由增大軌頭寬度和鋼軌整體高度，提高鋼軌之剛性以符合運量提昇之需求；而國內常用之軌頭斷面，如圖3所示。

(二) 軌腹部份

1. 鋼軌軌腹部份設計為細長狀，適度配置軌頭及軌底之相對位置（增加慣性積），以增大鋼軌之慣性矩及其抗彎曲能力。
2. 防止鋼軌傾斜及局部挫曲現象。

(三) 鋼軌上、下顎部份

1. 於鋼軌上顎與下顎採用1/2.75之斜度，可使魚尾鈑利用楔木原理夾緊鋼軌，有利於增大魚尾鈑之磨耗餘量，如圖4所示。
2. 若魚尾鈑斜率太小，魚尾鈑將受到過大的動力負載，加速魚尾鈑螺栓之鬆動與磨耗；若斜率太大，魚尾鈑螺栓則易受拉折斷。

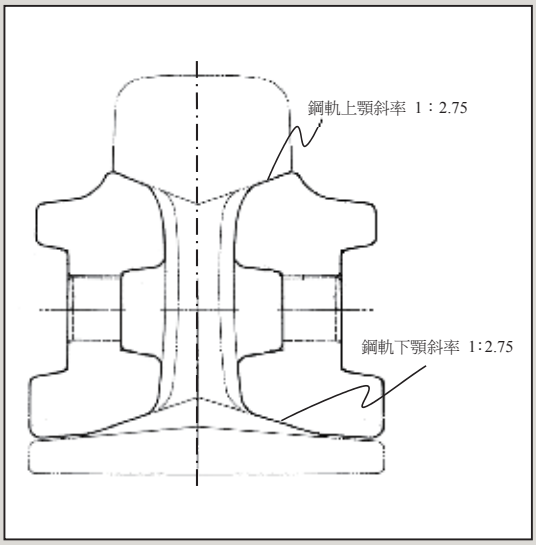

圖4 魚尾鈑安裝及斜率示意圖

圖5 鋼軌及扣件夾持圖

3. 軌腹與軌頭及軌底相接處，須設計小半徑之圓弧，以避免應力集中之效應及緩和鋼軌受衝擊之負載，並減少其在輥軋成型後，因冷卻而產生之殘餘應力。

(四) 軌底部份

1. 軌底寬度提供固定鋼軌所需之空間，確保其受力穩定。
2. 為保持軌底厚度，採用分段傾斜方式，提供鋼軌扣件足夠之夾持空間，如圖5所示。

3. 軌底較寬的鋼軌為軌枕或墊板提供足夠的承壓面積，並同時使鋼軌更加穩定。
4. 軌底厚度約須為高度的1/10，以抵抗極大的剪應力。

最後為避免鋼軌生產過程中產生冷卻速度不一之情形，導致鋼軌內部產生瑕疵，軌頭、軌腹及軌底三部份之面積須適當分配，以目前現行鋼軌之軌頭、軌腹及軌底為例，其面積比例約為40：20：40。

參、鋼軌輪廓方程式求解法

目前較常採用之鋼軌輪廓描述方式如下：

一、接觸角函數法

將原始接觸角曲線修正為期望之接觸角曲線，再反求對應之外型。可進一步研究接觸角曲線的各種參數或形狀，以導出不同要求之對應外型；且接觸角曲線上的任意一點都對應軌頭外型上的一點，同樣軌頭任意一點亦對應車輪踏面外型上的一點。所以接觸角曲線上的變化必然影響到車輪踏面或軌頭之外型變化。此方法也局限於參考圓弧與直線段之組合，通常皆須將接觸二者之一做為參考依據，用於設計任意形狀的車輪或軌頭外型，也可用於檢驗輪軌匹配之合理性。

二、離散點圓弧曲線擬合法

曲率求解方法是根據外型離散點擬合出曲線，並計算出各離散點對應的一階及二階導數，由公式(1)～(3)求出相應的曲率ρ。採用分段求解之方式，將圓弧外型離散點進行分段擬合，但此種方法對於任意點組成之踏面難以達到合理的計算精度。

$$R=R(y) \tag{1}$$

$$\rho=\frac{\frac{d^2\,[R(y)]}{dy^2}}{\left\{1+\left(\frac{d[R(y)]}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

$$\frac{d^2R(y)}{dy^2}=\frac{\left\{1+\left(\frac{d[R(y)]}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{R(y)} \tag{3}$$

其中

R：軌頭之圓弧半徑，為y之函數

ρ：軌頭之曲率

$\frac{d[R(y)]}{dy}$：為圓弧半徑之一階導數

$\frac{d^2R(y)}{dy^2}$：為圓弧半徑之二階導數

近期研究則依據上述離散點，採用Nystrom approximation method 近似二相接曲線。其中兩曲線之接點特性，須符合邊界條件如公式(4)所示，及限制條件如公式(5)所示，透過此近似法亦可有效降低外型離散點中之計算誤差，可求解出精確之鋼軌外型。

$$\begin{cases} x(y_0)=0 \\ x'(y_0)=0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} y_0=0 \\ x_0=0 \\ x'_0=tangent\ slop \end{cases} \tag{5}$$

＊ x'_0 為二個曲線接點之斜率

肆、曲柄滑塊繪製機構

本文將CNS 3268 E1008 50N、CNS 14827 E1061 60-1及14828 E1062 54-1三種標準鋼軌斷面置於座標軸上，原點定為軌頭之頂點進行研究及剖析，初步將鋼軌斷面輪廓切分為若干分段，如圖6所示。採用四連桿曲柄滑塊繪製機

構，可正確求出各種鋼軌特徵點之數值；CNS三種標準鋼軌重要參數，詳如表1所示。

一、機構說明

(一) G_n連續曲線

$G_{n,\ n=0,1,2}$之連續曲線，其標號描述二個相鄰曲線具有共同之邊界關係。在兩個曲線都具有共同的邊界，但相鄰的曲線是不光滑的或連續的情況下，這相鄰曲線被定義為G_0連續曲線；但二個相鄰曲線都具有共同的邊界與相鄰的曲線都相切（斜率相同），這些相鄰曲線被定義為G_1連續曲線；若二個相鄰曲線都具有共同的邊界，且在兩曲線之接點具有斜率及曲率皆相同之特性，這些相鄰曲線被定義為G_2連續曲線。於傳統機械製圖中，通常畫出二個圓弧具有不同的半徑，但二圓弧之接合點和圓弧的二個中心點存在共線之關係，如圖7所示；採用此方法繪製之二個圓弧，其公切線具有相同之斜率，恰好滿足G_1連續曲線之定義。

另亦有採用小圓盤在另一旋轉盤上轉動之繪製法，如圖8所示，二個圓弧於二轉盤轉動時進行曲線合成。這種機制亦可視

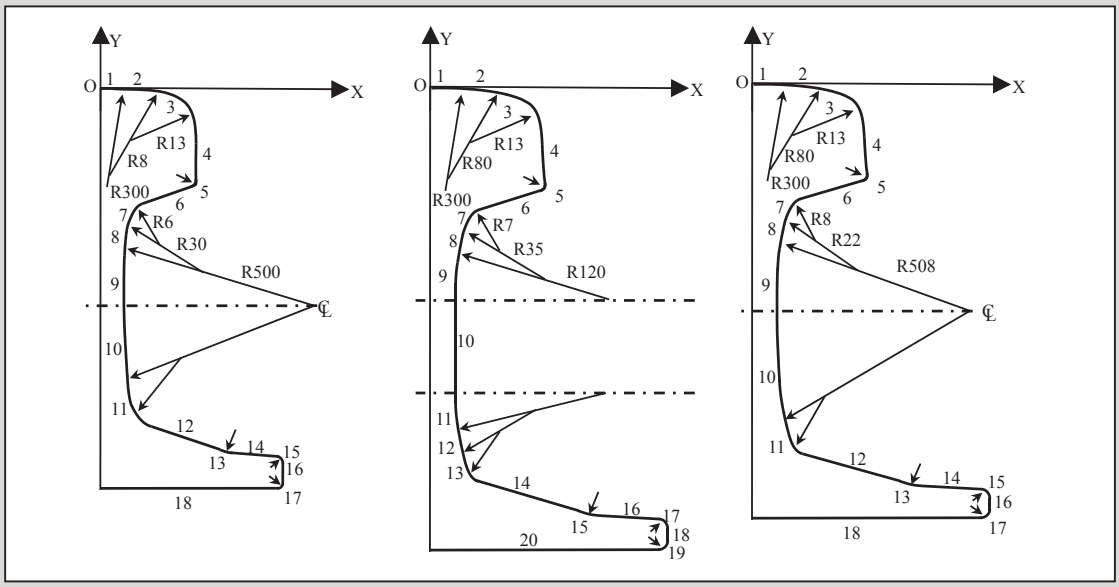

圖6 CNS 3268 E1008 50N、CNS 14827 E1061 60-1及14828 E1062 54-1
鋼軌斷面分段區域及座標軸定義

表1 CNS 鋼軌標準重要參數

CNS			鋼軌參數						
			軌高	軌底寬	軌頭寬	軌腹寬	軌頭高	軌底高	中心高
			mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
E1008	50kg	50N	153.00	127.00	65.00	15.00	49.00	30.00	76.00
E1061	60kg	60-1	172.00	150.00	72.00	16.50	51.00	31.50	N.A
E1061	60kg	60-2	174.00	145.00	65.00	16.50	49.00	30.10	77.50
E1062	54kg	54-1	159.00	140.00	70.00	16.00	49.40	30.20	76.20
E1062	54kg	54-2	159.00	140.00	70.00	16.00	49.40	30.20	76.20

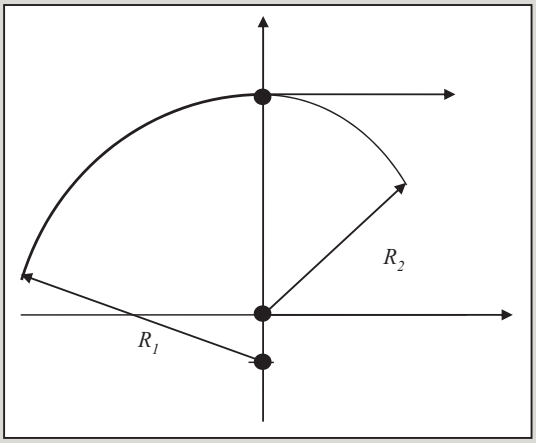

圖7 圓弧接合點和圓弧之中心點共線關係

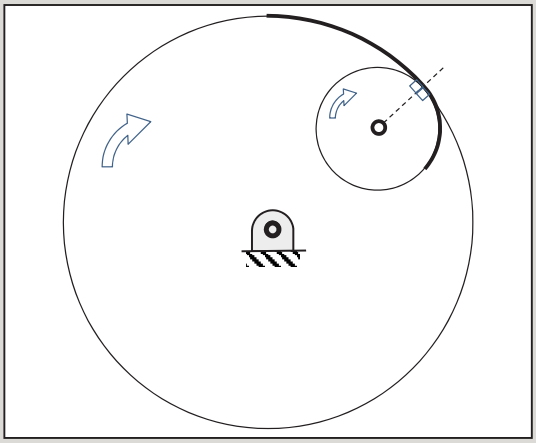

圖8 雙轉動圓盤產生G_1連續曲線

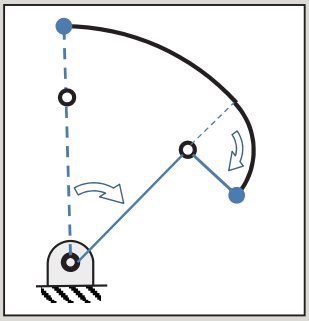

圖9 機械手臂繪製G_1連續曲線

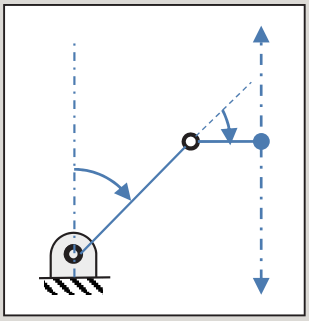

圖10 繪圖手臂移動路徑

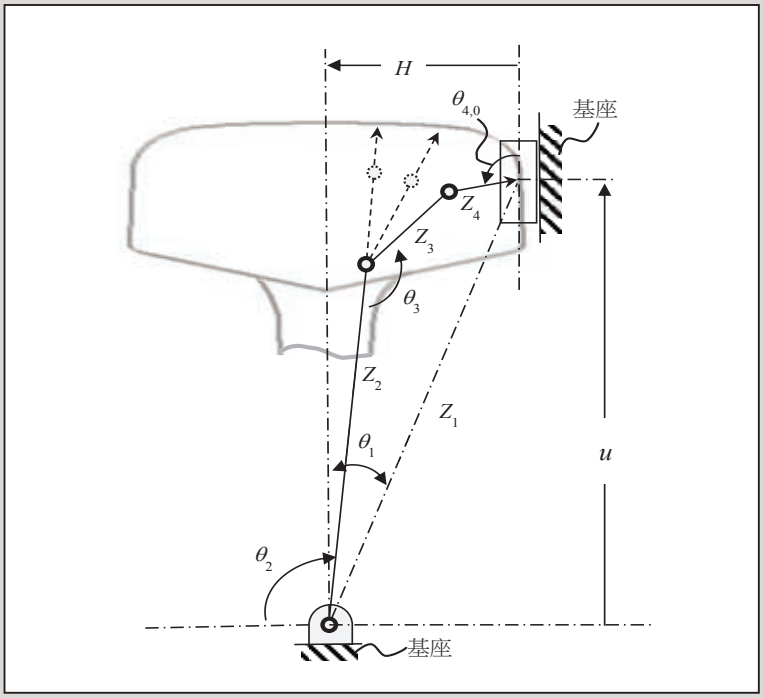

圖11 曲柄滑塊機構應用於軌頭複合圓弧之示意圖

為一個具有二個自由度之機器人手臂（對子），在較短的臂末端抓持器具繪製G_1連續曲線，如圖9所示。

(二) 四連桿曲柄滑塊繪製機構

當G_1連續曲線之繪圖手臂的掃略路徑為一條直線時，如圖10所示；此機構及掃略之線段構成一般之曲柄滑塊機構。此曲柄滑塊機構可由四根連桿及1個滑塊所組成，桿件長度對等於圓弧半徑，桿件角度則對應於圓弧長度。此機構可藉由桿件長度及角度之變化，於平面運動系任意區域中滑動。本文將其應用於描述一個由任意三個圓弧所組成之軌頭斷面，其中桿件頂點掃略之路徑，可透過輸入鋼軌斷面之重要尺寸參數，例如：圓弧半徑、軌頭寬度、鋼軌高度等，限制此機構之平面自由度，有效達到描述鋼軌頭部斷面之功能，如圖11所示。且因其平面自由度受到限制，所繪製出之鋼軌斷面具有獨特性，可

適用於鋼軌尺寸最佳化設計，透過選定主要之鋼軌參數，計算鋼軌其他相關尺寸資訊，亦可有效簡化CNS標準之尺寸標注。

(三) 曲柄滑塊機構運動方程式

曲柄滑塊機構運動方程式可從Freudenstein's方程式推導，而此機構運動方式經由Z_2輸入從Z_4輸出，則θ_2及$\theta_{4,0}$二個角度參數應予以保留，所以經由三角恆等式將θ_3之參數消除，使得公式成為θ_2及$\theta_{4,0}$之函數，如公式(6)所示：

$$F(\theta_2, u; \theta_{4,0}, H, Z_2, Z_3, Z_4) = K_1\sin(\theta_2-\theta_1)+K_2\cos(\theta_{4,0}+\theta_1)+K_3+\sin(\theta_2+\theta_{4,0})=0 \quad (6)$$

其中

$K_1=\frac{Z_1}{Z_4}$：為滑塊與基座間距及桿件4長度之比值

$K_2=\frac{Z_1}{Z_2}$：為滑塊與基座間距及桿件2長度之比值

$K_3=\frac{Z_3^2-Z_1^2-Z_2^2-Z_4^2}{2Z_2Z_4}$：為滑塊與基座間距、桿件2、桿件3及桿件4之桿長計算得知

$Z_1=\sqrt{u^2+H^2}$：

滑塊與基座間距可經由三角恆等式求解

$\theta_1=\tan^{-1}\frac{H}{u}$：為滑塊與基座間之角度

H：為滑塊與基座間之高度

u：為滑塊與基座間滑動之距離

此處為求解θ_2將公式(6)展開，經整理後可改寫公式(6)為公式(7)

$$\theta_2=f_2(u, \theta_{4,0}, H, Z_2, Z_3, Z_4)=\tan^{-1}\frac{K_4}{K_5}-\sin^{-1}\frac{K_6}{\sqrt{K_4^2+K_5^2}} \quad (7)$$

其中將公式簡化如下：

$$K_4=K_1\sin\theta_1-\sin\theta_{4,0}$$

$$K_5=K_1\cos\theta_1-\cos\theta_{4,0}$$

$$K_6=K_2\cos(\theta_{4,0}+\theta_1)+K_3$$

同理為求解θ_3可從Freudenstein's方程式推導，且經由三角恆等式將θ_2之參數消除，使得公式成為θ_3及$\theta_{4,0}$之函數，如公式(8)所示：

$$\theta_3=f_3(u, \theta_{4,0}, H, Z_2, Z_3, Z_4)=\frac{Z_2^2+Z_3^2-(Z_1^2+Z_4^2+2\cos(\theta_{4,0}+\theta_1))}{2Z_2Z_3} \quad (8)$$

其中

Z_1, Z_2, Z_3 及 Z_4 為桿件1、桿件2、桿件3與桿件4之長度

$\theta_1=\tan^{-1}\frac{H}{u}$：為滑塊與基座間之角度

此外，為求解u可經由公式(7)展開後，將$\theta_1=\tan^{-1}\frac{H}{u}$代入，經整理後可改寫為公式(9)：

$$u=f_4(\theta_2, \theta_{4,0}, H, Z_2, Z_3, Z_4)=Z_2\cos\theta_2+Z_3\sin(\cos^{-1}(\frac{Z_2\sin\theta_2-Z_4\sin\theta_{4,0}-H}{Z_3}))-Z_4\cos\theta_{4,0} \quad (9)$$

鋼軌斷面由圓弧所組成之區域皆可採用四連桿曲柄滑塊機構精確描述，透過求解四連桿曲柄滑塊機構之桿件位置及角度，可獲得鋼軌輪廓特徵點之數值，並輔以座標方式表示。其中CNS常用之三種標準鋼軌斷面特徵點詳如表2、表3及表4所示。且為提昇鋼軌輪廓方程式之可用性，將鋼軌輪廓方程式，以成熟及標準化之G Code方程式表達，最後採用CutViewer Mill 模擬軟體，將表2中之G Code方程式進行模擬，可將鋼軌斷面完整加工，其電腦數值控制工具機(Computer Numerical Control, CNC)之加工模擬結果如圖12所示。

表2 CNS 3268 E1008 50N 鋼軌輪廓方程式

區域	終點座標	G Code 方程式
1	x = 11.000000 y = -0. 201734	G02X11.000000Y-0.201734R300.000000
2	x = 21.065269 y = -1.211025	G02X21.065269Y-1.211025R80.000000
3	x = 31.948935 y = -13.71375	G02X31.948935Y-13.71375R13.000000
4	x = 32.499375 y = -35.730979	G01X32.499375Y-35.730979
5	x = 31.183486 y = -37.66055	G02X31.183486Y-37.660550R2.000000
6	x = 14.185373 y = -43.841682	G01X14.185373Y-43.841682
7	x = 10.842903 y = -46.850554	G03X10.842903Y-46.850554R6.000000
8	x = 7.827178 y = -58.914894	G03X7.827178Y-58.914894R30.000000
9	x = 7.500000 y = -77.000000	G03X7.500000Y-77.000000R500.000000
10	x = 9.101387 y = -116.985275	G03X9.101387Y-116.985275R500.000000
11	x = 18.927199 y = -129.882618	G03X18.927199Y-129.882618R15.000000
12	x = 41.267461 y = -138.006349	G01X41.267461Y-138.006349
13	x = 46.112248 y =-139.111225	G03X46.112248Y-139.111225R20.000000
14	x = 61.699007 y = -140.669901	G01X61.699007Y-140.669901
15	x = 63.500000 y = -142.659975	G02X63.500000Y-142.659975R2.000000
16	x = 63.500000 y = -151.000000	G01X63.500000Y-151.000000
17	x = 61.500000 y = -153.000000	G02X61.500000Y-153.000000R2.000000
18	x = 0.000000 y = -153.000000	G01X0.000000Y-153.000000

*G Code之原點設定於 X0.000000Y0.000000

表3 CNS 14827 E1061 60-1 鋼軌輪廓方程式

區域	終點座標	G Code 方程式
1	x = 10.228020 y = -0.174405	G02X10.228020Y-0.174405R300.000000
2	x = 26.026723 y = -2.302574	G02X26.026723Y-2.302574R80.000000
3	x = 36.000000 y = -14.300000	G02X36.000000Y-14.300000R13.000000
4	x = 37.048763 y = -35.275267	G01X37.048763Y-35.275267
5	x = 35.077736 y = -38.244460	G02X35.077736Y-38.244460R3.000000
6	x = 16.501569 y = -44.999429	G01X16.501569Y-44.999429
7	x = 12.237964 y = -49.409979	G03X12.237964Y-49.409979R7.000000
8	x = 11.450465 y = -52.220588	G03X11.450465Y-52.220588R35.000000
9	x = 8.250000 y = -79.750000	G03X8.250000Y -79.750000R120.000000
10	x = 8.250000 y = -111.750000	G01X8.250000Y-111.750000
11	x = 11.450465 y = -139.279412	G03X11.450465Y-139.279412R120.000000
12	x = 12.237964 y =-142.090021	G03X12.237964Y-142.090021R35.000000
13	x = 16.501569 y = -146.500571	G03X16.501569Y-146.500571R7.000000
14	x = 45.770339 y = -157.143760	G01X45.770339Y-157.143760
15	x = 56.590180 y = -159.450371	G03X56.590180Y-159.450371R40.000000
16	x = 71.284988 y = -160.500000	G01X71.284988Y-160.500000
17	x = 75.000000 y = -164.489835	G02X75.000000Y-164.489835R4.000000
18	x = 75.000000 y = -170.000000	G01X75.000000Y-170.000000
19	x = 73.000000 y = -172.000000	G02X73.000000Y-172.000000R2.000000
20	x = 0.000000 y = -172.000000	G01X0.000000Y-172.000000

*G Code之原點設定於 X0.000000Y0.000000

表4 CNS 14828 E1062 54-1 鋼軌輪廓方程式

區域	終點座標	G Code 方程式
1	x = 10.012279 y = -0.167123	G02X10.012279Y-0.167123R300.000000
2	x = 24.863391 y = -2.064804	G02X24.863391Y-2.064804R80.000000
3	x = 35.000000 y = -14.100000	G02X35.000000Y-14.100000R13.000000
4	x = 35.997870 y = -34.057410	G01X35.997870Y-34.057410
5	x = 34.026843 y = -37.026603	G02X34.026843Y-37.026603R3.000000
6	x = 15.753801 y = -43.671345	G01X15.753801Y-43.671345
7	x = 11.317920 y = -47.640945	G03X11.317920Y-47.640945R8.000000
8	x = 9.081789 y = -55.965021	G03X9.081789Y-55.965021R22.000000
9	x = 8.000000 y = -89.100000	G03X8.000000Y-89.100000R508.000000
10	x = 9.060595 y = -121.909137	G03X9.060595Y-121.909137R508.000000
11	x = 19.559301 y = -135.912473	G03X19.559301Y-135.912473R16.000000
12	x = 43.922633 y = -144.771867	G01X43.922633Y-144.771867
13	x = 48.767420 y =-145.876742	G03X48.767420Y-145.876742R20.000000
14	x = 67.298511 y = -147.729851	G01X67.298511Y-147.729851
15	x = 70.000000 y = -150.714963	G02X70.000000Y-150.714963R3.000000
16	x = 70.000000 y = -156.000000	G01X70.000000Y-156.000000
17	x = 68.000000 y = -159.000000	G02X68.000000Y-159.000000R2.000000
18	x = 0.000000 y = -159.000000	G01X0.000000Y-159.000000

*G Code之原點設定於 X0.000000Y0.000000

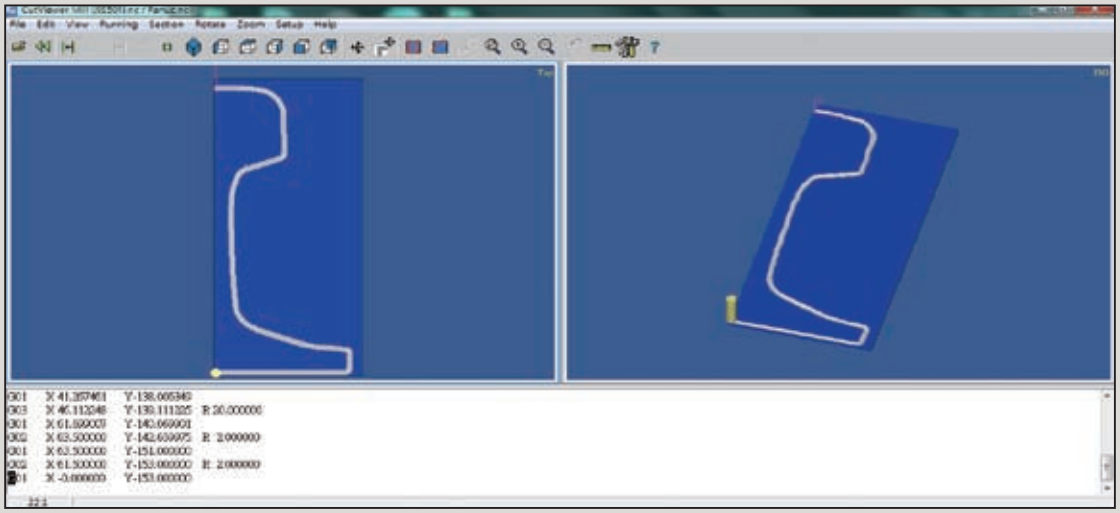

圖12 CutViewer Mill鋼軌斷面CNC加工模擬介面

伍、結語

鋼軌具體實現車輪行走之路線，其各項設計參數皆重要影響整體鋼軌之特性，為軌道系統中重要的構件之一。本文提出一種四連桿曲柄滑塊機構，可精確描述軌頭及軌腹複合圓弧之設計曲線；亦針對CNS所制定之3268 E1008 50N、14827 E1061 60-1 及14828 E1062 54-1 三種鋼軌斷面進行研究及剖析，基於G1 Continuity連續曲線之觀點，採用CNS標準鋼軌之重要參數作為限制條件，並藉由四連桿曲柄滑塊機構剖析鋼軌斷面各特徵點，提供精確鋼軌輪廓方程式；且透過此機構計算鋼軌特徵點，可有效降低上述二種近似方法之計算誤差。經由機構分析及最佳化，可使得鋼軌設計結果更加合理，獲得之鋼軌斷面特徵點可具有小數點後6位數之高精確度，亦符合上述各項鋼軌設計原則。此研究成果可應用於後續輪軌接觸行為及鋼軌受力分佈之研究；透過精確鋼軌輪廓方程式，可大幅提昇輪軌接觸計算之精確性。

G Code方程式廣泛被使用於電腦數值控制工具機(Computer Numerical Control, CNC)，為一種成熟及標準之程式化語言。為提昇鋼軌輪廓方程式之通用性，應用G Code方程式描述鋼軌輪廓，使得此鋼軌斷面可藉由CNC線切割機加工成型，製成符合CNS標準之型規或檢具，並廣泛應用於日後鋼軌進口時之檢驗工作，以增加檢驗效率。

參考文獻

1. 交通部，「2013年中華民國交通業務概況」，民國102年5月。
2. 黃民仁，「新世紀軌道工程學」，2007年。
3. 佐藤吉彥，「新軌道力學」，2001年。
4. 黃漢榮，「軌道工程學」，2003年。
5. 經濟部標準檢驗局，「CNS 3268 E1008普通鋼軌」，民國60年07月。
6. 經濟部標準檢驗局，「CNS 14827 E1061 60kg普通鋼軌之剖面」，民國93年07月。
7. 經濟部標準檢驗局，「CNS 14828 E1062 54kg普通鋼軌之剖面」，民國93年07月。
8. CutViewer Mill試用版軟體。